

CHAPITRE II

LA LOGIQUE FLOUE

2.1. INTRODUCTION

La logique floue suscite actuellement un intérêt général de la part des chercheurs, des ingénieurs et des industriels, et plus généralement de la part de tous ceux qui éprouvent le besoin de formaliser des méthodes empiriques, de généraliser des modes de raisonnement naturel, d'automatiser la prise de décision dans leur domaine et de construire des systèmes artificiels effectuant les tâches habituellement prises en charge par les humains.

Dans le domaine du génie électrique, la commande à logique floue a fait l'objet de plusieurs travaux : dans la commande des convertisseurs statiques et dans la commande des machines électriques [23], [24], [25], dans la navigation de robots mobiles [26], [27]. Toutes ces applications ont démontré qu'un régulateur à logique floue est plus robuste qu'un régulateur conventionnel [24], [28].

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions principales de théorie de la logique floue.

2.2. LA LOGIQUE FLOUE

Les compréhensions de l'univers dans lequel nous évoluons sont généralement imparfaites dans la mesure où elles peuvent être entachées d'incertitudes et/ou d'imprécisions, ne serait-ce qu'à travers la perception que nous en avons. Or, nous pouvons constater que l'homme intègre naturellement ces imperfections dans la vie de tous les jours, en particulier au niveau du raisonnement et de la décision. L'idée du professeur Lotfi A. Zadeh en 1965, à travers le nouveau concept ensembliste d'appartenance graduelle d'un élément à un ensemble, a été de définir une logique multi évaluée permettant de modéliser ces imperfections c'est prendre en compte les états intermédiaires entre le tout et le rien.

2.3. PRINCIPE DE LA LOGIQUE FLOUE

Une des caractéristiques du raisonnement humain est qu'il est généralement fondé sur des données imprécises ou même incomplètes. En effet les connaissances dont nous disposons sur un système quelconque sont généralement incertaines ou vagues, soit parce que nous avons un doute sur leur validité ou alors nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement.

C'est une technique pour le traitement de connaissances imprécises et incertaines. Elle permet de prendre en considération des variables linguistiques dont les valeurs sont des mots ou des expressions du langage naturel, telles que rapide, lent, grand, petit, etc....

Un exemple : dans la logique classique, une vitesse peut être qualifiée par les termes « Elevée ». Dans la logique floue, des échelons d'appréciation intermédiaires de la variable vitesse sont possibles. La «Vitesse» devient une variable linguistique dont les valeurs sont par exemple : « Très faible », « Faible », « Moyenne », «Elevée », « Très élevée ».

La logique floue peut être considérée comme une extension de la logique classique ou binaire.

2.4. LES BASES THEORIQUES DE LA LOGIQUE FLOUE

On décrit ainsi des situations à l'aide de combinaisons de l'appartenance des valeurs mesurées à un ensemble déterminé de valeurs d'entrées. Chaque situation demande une action déterminée, pour cela on fait appel à un certain nombre d'opération sur les ensembles, que nous allons examiner dans la suite.

Les éléments de base de la logique floue sont les suivants [29]:

- les ensembles flous (fuzzy sets) pour la représentation de variables linguistiques ;
- les fonctions d'appartenance (memberships functions) qui décrivent le degré d'appartenance de grandeurs physiques (vitesse, courant, température) à un ensemble flou (faible, élevé, chaud) ;
- les opérateurs flous qui permettent l'énonciation de relations logiques entre les assertions floues (conclusion du genre « Si, Alors »);

✓ l'inférence floue c'est à dire la déduction de nouvelles informations déjà

disponibles sur la base des règles linguistiques.

Le premier concept important à expliquer est celui de variable linguistique et de sous-ensemble flou [30].

2.4.1 Sous-ensemble flou

Le concept de sous-ensemble flou a été introduit pour éviter les passages brusques d'une classe à une autre (de la classe noire à la classe blanche par exemple) et autoriser des éléments à n'appartenir complètement ni à l'une ni à l'autre (à être gris, par exemple) ou encore à appartenir partiellement à chacune (avec un fort degré à la classe noire et un faible degré à la classe blanche dans le cas du gris foncé).

La notion de sous-ensemble flou permet de traiter :

- des catégories aux limites mal définies (comme « centre ville » ou « ancien »),
- des situations intermédiaires entre le tout et le rien (« presque noir »),
- le passage progressif d'une propriété à une autre (de « proche » à « éloigné » selon la distance),
- des valeurs approximatives (« environ 2 km »),
- des classes en évitant l'utilisation arbitraire de limites rigides (il est difficile de dire qu'une maison située à 200 m de la plage en est proche, mais qu'à 210 m elle en est éloignée).

Remarque :

Le terme « sous-ensemble » flou provient du fait que celui-ci est considéré comme une partie de l'univers de discours U. Dans la littérature, on peut trouver parfois ensemble flou, qui constitue un abus de langage.

2.4.2 Variables linguistiques

La notion de variable linguistique permet de modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise est inconnue. Une variable linguistique, ou variable floue, est donc une variable dont les valeurs appartiennent à des ensembles flous pouvant représenter des mots du langage naturel. Ainsi une variable floue peut prendre simultanément plusieurs valeurs linguistiques.

Par exemple la variable « Taille » peut appartenir aux ensembles flous " Petit, Moyen, Grand ".

La variable linguistique peut être représentée par un triplet $(x, T(x), U)$, dans lequel x est le nom de la variable linguistique, $T(x)$ l'ensemble des noms des valeurs linguistiques de x et U l'ensemble de référence (univers de discours).

Par exemple : $x = \text{Vitesse}$ est une variable linguistique, son ensemble de valeurs peut être :

$T(\text{Vitesse}) = [\text{Faible}, \text{Moyenne}, \text{Elevée}, \dots]$ où chaque terme dans $T(\text{Vitesse})$ est caractérisé par un ensemble flou dans un univers de discours $U = [0, 100]$ (figure. 2.1)

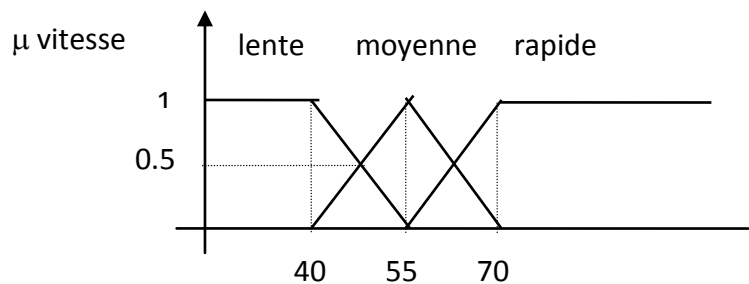


Fig.2.1 : Représentation floue de la variable Vitesse

On attribue à chaque valeur de la variable linguistique des fonctions d'appartenance μ , dont la valeur varie entre 0 et 1, en tenant compte de la classification en un certain nombre d'ensembles flous.

2.4.3. Fonction d'appartenance :

Comme exemple pour les fonctions d'appartenance, on présente l'application de l'air ambiant d'un local à la température. Dans le cas le plus simple on peut distinguer deux valeurs : froid et chaud de la variable linguistique température. Elles forment deux ensembles flous. ainsi une température de 16° , par exemple, appartient avec un facteur d'appartenance $\mu=0.7$ à l'ensemble *froid* et avec $\mu=0.3$ à l'ensemble *chaud*. Explicitement on écrit : [31]

$$\mu_{\text{froid}}(\theta = 16^\circ) = 0.7 \quad \text{et} \quad \mu_{\text{chaud}}(\theta = 16^\circ) = 0.3$$

Souvent il s'avère nécessaire d'introduire une subdiviser plus fine, par exemple avec quatre valeurs froid, tiède, chaud et très chaud.

2.4.3.1. Différentes formes de fonctions d'appartenance :

- fonction triangulaire : elle est définie par trois paramètres $\{a,b,c\}$:

$$\mu(x) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{d-c} \right), 0 \right] \quad (2.4)$$

- fonction trapézoïde : elle est définie par quatre paramètres $\{a,b,c,d\}$:

$$\mu(x) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right] \quad (2.5)$$

- fonction gaussienne : elle est définie par deux paramètres $\{m,\sigma\}$

$$\mu(x) = \exp \left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.6)$$

- fonction sigmoïdale : elle est définie par deux paramètres $\{a,c\}$

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \exp(a(x-c))} \quad (2.7)$$

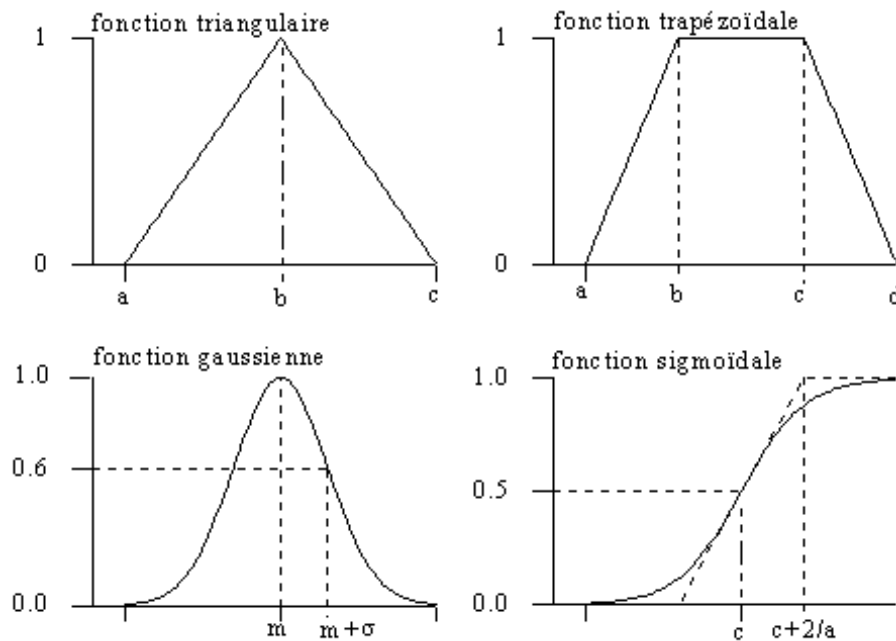


Fig.2.2 : Forme des fonctions d'appartenance usuelle

2.4.4. Univers de discours, ensemble flou, degré d'appartenance

En logique classique, une variable peut prendre deux valeurs possibles : vrai (1) ou faux (0).

En logique floue, un ensemble flou A d'un univers de discours (ensemble de toutes les valeurs possibles de x) X est défini par une fonction d'appartenance μ_A qui à tout élément x appartenant à X, associe un nombre $\mu_A(x)$ compris entre 0 et 1, qui représente le degré ou facteur d'appartenance de x à l'ensemble flou A

(0 représentant la non - appartenance et 1 l'appartenance totale).

Le concept d'ensemble flou a donc pour objectif de permettre des gradations progressives dans l'appartenance d'un élément à une classe.

L'appellation d'un ensemble flou est d'ordinaire en relation avec la signification que l'on souhaite lui donner et ce mot correspond à la valeur de la variable linguistique x appartenant à X .

Prenons l'exemple de la taille d'une personne classée en deux ensembles flous « Petite » et « Grande », chaque personne a une taille qui se situe entre les deux (figure 2.3).

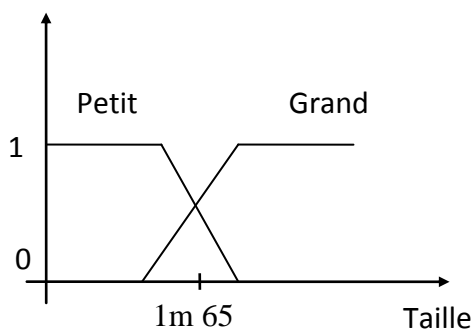


Fig.2.3 : Représentation floue de la variable Taille

Si je mesure 1m 65, j'appartiens à la fois à l'ensemble « Petite » et à l'ensemble « Grande » avec des degrés d'appartenance respectifs de 0.5 - Si je mesure 1m 40, je n'appartiens qu'à l'ensemble « Petite » avec un degré 1, - Si je mesure 1m 80, je n'appartiens qu'à l'ensemble « Grande » avec un degré 1

2.5. OPERATEURS DE LA LOGIQUE FLOUE

Les variables linguistiques sont liées entre elles au niveau des inférences par des opérateurs ET ou OU. Il s'agit d'opérateurs de la logique floue qui interviennent sur les fonctions d'appartenance représentant les variables linguistiques.

Le plus souvent, les opérateurs ET ou OU sont réalisés respectivement par les règles «min» et «max». Il y a alors une certaine affinité avec les règles de la logique classique. Cependant, il existe un grand nombre de règles pour la réalisation des opérateurs ET et OU qui tiennent compte du caractère particulier de la logique floue.

2.5.1. Opérateur NON :

Selon la théorie des ensembles, l'ensemble complémentaire

$$c = \bar{a} = \text{NON}(a)$$

Il est défini par les éléments x qui n'appartiennent pas à l'ensemble a , dans le cas de la logique floue, cette définition peut être exprimée par : [15]

$$\mu_c(x) = 1 - \mu_a(x). \quad (2.8)$$

2.5.2. Opérateur ET :

Il correspond à l'intersection de deux ensembles a et b , on écrit donc :

$$c = a \cap b = a.ET.b$$

Dans le cas de la logique floue, l'opérateur est réalisé généralement par la fonction *minimum* :

$$\mu_c(x) = \min(\mu_a(x), \mu_b(x)) \quad (2.9)$$

On remarque alors que la fonction résultante peut ne pas atteindre la valeur 1 et on peut facilement vérifier que l'opérateur minimum est commutatif, c'est à dire qu'il est possible d'invertir $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ sans que la résultat change.

2.5.3. Opérateur OU :

Il correspond à l'union de deux ensembles a et b , ainsi on aura donc :

$$c = a \cup b = a.OU.b$$

La réalisation de l'opérateur ou au niveau de la logique floue se fait en général par la formation du maximum, appliquée aux fonctions d'appartenance $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ des deux ensembles A et B . On a donc l'opérateur maximum.

$$\mu_c(x) = \max(\mu_a(x), \mu_b(x)) \quad (2.10)$$

On constate que la fonction d'appartenance résultante peut atteindre deux fois la valeur 1.

2.5.4. Réalisation arithmétique des opérateurs ET et OU :

L'opérateur ET est souvent réalisé par la formation du produit appliqué aux fonctions d'appartenance, selon la relation :

$$\mu_c(x) = \mu_a(x) \cdot \mu_b(x) \quad (2.11)$$

La fonction d'appartenance résultante est toujours inférieure ou égale à 1.

Par analogie on peut réaliser l'opérateur OU par la formation de la somme des fonctions d'appartenance ou plus précisément par la valeur moyenne :

$$\mu_c(x) = \frac{1}{2} \cdot (\mu_a(x) + \mu_b(x)) \quad (2.12)$$

La somme est divisée par deux car il est fort possible que qu'elle dépasse le domaine admissible

2.6. DEDUCTIONS FLOUES (INFERENCES)

Afin de tirer des conclusions, plusieurs valeurs de variables linguistiques sont liées entre elles par des règles. On parle alors de déductions floues ou inférences.

Les règles peuvent alors être exprimées sous la forme générale:

Opération: = **Si** Condition 1 **Et** Condition 1', **Alors** Conséquence 1, ou

Si Condition 2 Et Condition 2', Alors Conséquence 2, ou

Si Condition m **Et** Condition m', **Alors** Conséquence m.

Si les conditions, qui sont exprimées par la condition (prémisse), sont vraies, alors l'action spécifiée à la conséquence (conclusion), aura lieu.

Les inférences avec plusieurs règles sont caractérisées par le fait qu'en général plusieurs règles sont (plus ou moins) simultanément vérifiées. L'opération qui doit être effectuée doit tenir compte des différentes conditions et s'obtient par les règles de calcul de la logique floue.

2.7. LE RAISONNEMENT FLOU

2.7.1. Généralités

Après avoir exposé la répartition des valeurs mesurées en ensembles flous et défini les opérations sur ces ensembles, nous allons maintenant introduire le raisonnement flou et voir comment un régulateur peut être exécuté sur la base des règles logiques.

L'exemple précédent de la commande de la température nous a donné un aperçu du concept du raisonnement utilisé : **Si** les conditions sont remplies, **Alors** la conclusion est validée.

Avec cet unique schéma de raisonnement et les trois opérateurs **Et**, **Ou** et **Non**, nous pouvons déjà prendre un grand nombre de décisions logiques. Nous produisons aussi une nouvelle information (une décision) à partir d'informations anciennes.

Le raisonnement flou fait appel à trois notions et étapes fondamentales [28]:

- ✓ *l'implication floue,*
- ✓ *l'inférence floue,*
- ✓ *l'agrégation des règles.*

2.7.2. L'implication floue

L'implication floue donne une information sur le degré de vérité d'une règle floue [30]. En d'autres termes, on quantifie la force de véracité entre la prémisse et la conclusion. Considérons par exemple les deux propositions floues

" x est A "

" y est B "

Où x et y sont des variables floues et A et B des ensembles flous de l'univers du discours U. ainsi que la règle floue : **Si** " x est A " **Alors** " y est B ".

L'implication floue donne alors le degré de vérité de la règle floue précédente à partir des degrés d'appartenance de x à A (prémisse) et de y à B (conclusion). Il n'existe pas une façon unique de définir l'implication floue.

On notera implication : opérateur *imp* (équivalent à l'opérateur Alors).

Parmi toutes les normes d'implication qui existent celles qui sont les plus utilisées sont :

$$✓ \text{ La norme Mamdani } : \text{imp} (\mu_A(x), \mu_B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (2.13)$$

$$✓ \text{ La norme Larsen } : \text{imp} (\mu_A(x), \mu_B(y)) = (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)) \quad (2.14)$$

2.7.3. L'inférence floue

Le problème tel qu'il se pose en pratique n'est généralement pas de mesurer le degré de véracité d'une implication mais bien de déduire, à l'aide de faits et de diverses règles implicatives, des événements potentiels. En logique classique, un tel raisonnement porte le nom de Modus Ponens (raisonnement par l'affirmation).

Si $p \Rightarrow q$ vrai

Et p vrai

Alors q vrai

Il nous faut le généraliser. Vont intervenir dans cette étape la « fonction d'implication » de l'implication floue, image du lien Et les fonctions d'appartenance des sous-ensembles des prémisses(s) et conclusion(s), images de l'importance des événements.

De façon générale, les conditions d'utilisation du Modus Ponens Généralisé sont les suivantes :

| | <i>prémisse</i> | <i>conclusion</i> |
|---------------|------------------------|--------------------------|
| Règle floue : | Si x est A | Alors y est B |
| Fait observé: | Si x est A' | |
| ----- | | |
| Conséquence : | | y est B' |

A' et B' sont les ensembles flous constatés dans le cas que l'on traite et ne sont pas nécessairement strictement égaux à A et B . B' est l'ensemble flou résultant de A' par l'application de l'implication.

Les informations disponibles pour déterminer la conséquence sont donc d'une part celles relatives à la règle, quantifiées par l'implication floue $\mu_{B/A}(x, y)$, d'autre part celles relatives au fait observé, quantifiées par la fonction d'appartenance $\mu_{A'}$.

2.7.4. Agrégation des règles

Lorsque la base de connaissance comporte plusieurs règles (comme notre exemple de la régulation de température), l'ensemble flou inféré B' est obtenu après une opération appelée agrégation des règles. En d'autres termes l'agrégation des règles utilise la contribution de toutes les règles activées pour en déduire une action de commande floue. Généralement, les règles sont activées en parallèle et sont liées par l'opérateur Ou [30].

Nous pouvons considérer que chaque règle donne un avis sur la valeur à attribuer au signal de commande, le poids de chaque avis dépend du degré de vérité de la conclusion.

Dans l'exemple suivant :

Si "x est A" Et "y est B" Alors "z est C" Ou

Si "x est A' " Et "y est B' " Alors "z est C' " Ou

2.8. CONCLUSION

Dans ce chapitre, sont l'utilisation du concept d'ensemble flou peuvent être appliqués à beaucoup de problèmes où, selon la nature de l'information, la manipulation de l'imprécis ou vague est indispensable: (classification, décision multicritère, base de données, commande), ainsi que les opérateurs flous ont été donnés. On a essayé dans ce chapitre de toucher tous les axes principaux concernant le fondement de la théorie des ensembles flous et de la logique floue. La théorie des ensembles flous trouve son application dans plusieurs domaines, tels que l'informatique, l'automatique...etc. Comme nous l'avons vu, la possibilité de réaliser les inférences floues de plusieurs manières prouve la richesse de cette théorie.

Dans ce qui suit nous allons voir une application de cette théorie dans le domaine de la commande.